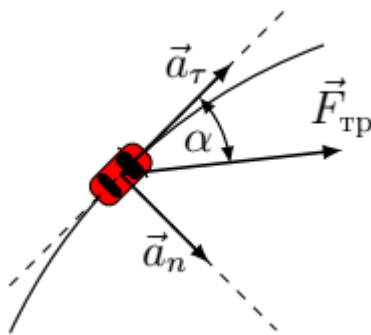




1 ?? До какой максимальной скорости может разогнаться автомобиль на этой дороге?



В рамках предположений условия максимальная величина сила трения колес о поверхность дороги равна $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu N = \mu mg$, где m – масса автомобиля, и при этом ее можно направить любом направлении в горизонтальной плоскости дороги. Так как другие горизонтальные силы на автомобиль не действуют, то именно сила трения и разгоняет автомобиль, и удерживает его на нужной траектории. Пусть α – угол между скоростью автомобиля и направлением силы трения в некоторый момент времени (см. рисунок). Тогда уравнения для касательной и центростремительной компонент ускорения автомобиля имеют вид

$$\begin{cases} ma_{\tau} = m \frac{dv}{dt} = \mu mg \cdot \cos(\alpha) \\ ma_n = m \frac{v^2}{R} = \mu mg \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \quad (1).$$

Видно, что разгон автомобиля завершается $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$ и скорость достигает максимального возможного значения $v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с при $\alpha = 90^\circ$. Далее угол α и скорость автомобиля поддерживаются постоянными.

2 ?? Определите скорость автомобиля при прохождении точек C , D и B во время заезда (см. рисунок).

Уравнение для касательной компоненты ускорения можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{v \cdot dv}{v \cdot dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \quad (2).$$

Здесь s – путь, пройденный автомобилем от момента старта.

Далее можно действовать как минимум тремя путями.

СПОСОБ I: Подставив в (2) квадрат скорости из второго уравнения (1), находим, что

$$\mu g R \frac{d(\sin(\alpha))}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow d\alpha = \frac{2}{R} ds.$$

На старте $s = 0$ и $\alpha = 0$, то есть после суммирования приращений в этом соотношении от старта до любого момента времени в процессе разгона получаем связь угла α с пройденным автомобилем расстоянием $\alpha(s) = \frac{2s}{R}$. Значит, разгон завершится в момент времени, когда $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C .

СПОСОБ II: Выразив $\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu g R} = \left(\frac{v}{v_m}\right)^2$ и подставив это соотношение в уравнение (2), приводим его к виду $\frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4}$. Введем новую переменную $y \equiv \left(\frac{v}{v_m}\right)^2$, и получим уравнение $\frac{dy}{ds} = \frac{2}{R} \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow \frac{2}{R} ds = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$. Интегрируя его по любому участку пути на дуге AC , находим, что

$$\frac{2}{R} s = \int_0^{(v/v_m)^2} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin\left(\frac{v^2}{v_m^2}\right) \Rightarrow v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right).$$

Как видно, скорость достигает максимума при $s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C .

СПОСОБ III: Составив систему из второго уравнения в (1) и (2), можно получить из нее уравнение для зависимости $v^2(s)$ на участке AC

$$\begin{cases} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ \frac{d(v^2)}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2(v^2)}{ds^2} = -2\mu g \cdot \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2}{R} \end{cases}$$

Действительно, подставляя в уравнение для $\frac{d^2(v^2)}{ds^2}$ полученные

выражения для $\sin(\alpha)$ и $\frac{d\alpha}{ds}$, приходим к уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2(v^2)}{ds^2} + \frac{4}{R^2} v^2 = 0.$$

С учетом условий $v^2(0) = 0$ и $(v^2)'_s(0) = \mu g R$ приходим к решению $v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right)$. Как видно, скорость достигает максимума при $s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C .

Таким образом, во время заезда с минимальным временем прохождения полуокружности скорость автомобиля в точках C, D и B равна максимальной:
 $v_C = v_D = v_B = v_m = \sqrt{\mu g R} = 20 \text{ м/с}.$

3 ?? Найдите общее время прохождения полуокружности AB .

Ясно, что время прохождения участка полуокружности от C до B равно $t_{CB} = \frac{3\pi R}{4v_m} = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{R}{\mu g}}$. В зависимости от способа решения в пункте 2 далее можно использовать разные способы решения и в этом пункте.

СПОСОБ I: Исключим угол α из уравнений (1): на участке AC

$$\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu g R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4} \Rightarrow dt = \frac{v_m}{\mu g} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \frac{v}{v_m}$. На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \beta \sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

СПОСОБЫ II и III: Поскольку на участке AC $v(s) = v_m \sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)} = \frac{ds}{dt}$, то:

$$dt = \frac{1}{v_m} \frac{ds}{\sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}$. Отметим, что

$$\sin\left(\frac{2s}{R}\right) = x^2 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{2s}{R}\right) \frac{ds}{R} = 2x dx \Rightarrow \frac{ds}{R} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx.$$

На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \beta \sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

В итоге общее время прохождения полуокружности AB равно

Ответ:

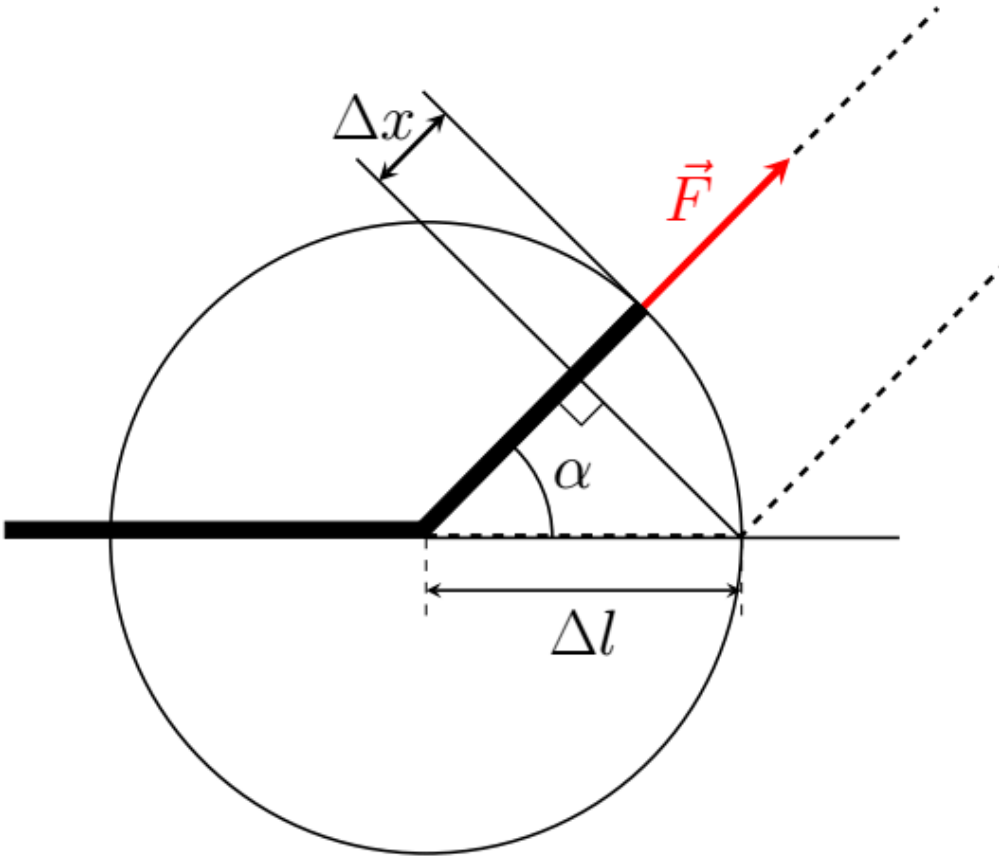
$$T = t_{AC} + t_{CB} = \left(\beta + \frac{3\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 14,7 \text{ с}.$$



1 ?? Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?

Когда приложенная сила F постоянна по величине и направлению, угол наклона оторванной части ленты α также постоянен. Если внешняя сила достаточна по величине и приводит к отрыву части ленты малой длины Δl , точка, к которой приложена внешняя сила, перемещается на расстояние Δx , совершая при этом работу, которую можно связать с величиной σ и площадью ленты оторвавшейся части ленты $\Delta S = d \cdot \Delta l$:

$$\Delta A = \Delta x \cdot F = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot d \cdot \Delta l \quad (1).$$



Перемещение точки приложения силы Δx может быть выражено через Δl и α :

$$\Delta x = \Delta l \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (2).$$

Подставляя (2) в (1), получаем выражение для силы $F = F(\alpha)$, необходимой для отрывания ленты от стола под некоторым углом:

$$F = \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha}.$$

Сила принимает минимальное значение при максимальном знаменателе $1 - \cos \alpha = 2$, то есть при $\alpha = \pi$.

Ответ: $\alpha = \pi$.

2 ?? Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45^\circ$. К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?

Теперь рассмотрим второй случай. Силы натяжения ленты и нити равны по модулю, так что будем их обозначать T . Из условия равновесия груза $T = mg$.

Очевидно, что если сила натяжения T не превышает силу отрыва ленты для угла α_1 , то лента не будет отрываться и система будет покоиться. Максимальная сила T , которая может быть достигнута при равновесии системы $T = \sigma d / (1 - \cos \alpha_1)$. Тогда масса груза равна

$$m = \frac{\sigma d}{(1 - \cos \alpha_1) \cdot g} \approx 0,068 \text{ кг}.$$

Ответ: $m \approx 68$ г.

3 ?? К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30^\circ$ к горизонту. Найдите массу второго груза M , расстояние Δh , на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2 .

Теперь рассмотрим случай добавления груза массой M . Для начала определим длину участка ленты ΔL , который оторвался от стола до момента остановки грузов. Его можно выразить через высоту блока H и углы α_1 и α_2 :

$$\Delta L = \frac{H}{\text{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\text{tg} \alpha_1} \approx 0,732 \cdot H = 0,732 \text{ м}.$$

Для нахождения Δh используем условие на сохранение полной длины нити и ленты (ввиду их нерастяжимости):

$$\Delta L + L_1 = L_2 + \Delta h.$$

где $L_1 = H / \sin \alpha_1$ и $L_2 = H / \sin \alpha_2$ — это расстояния от блока до точки отрыва ленты от стола в начальный и конечный момент соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} + \frac{H}{\sin \alpha_1} - \frac{H}{\sin \alpha_2} = \\ &= H \left(\frac{1 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} - \frac{1 - \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \right) \approx 0,146 \cdot H = 0,146 \text{ м.} \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta h \approx 14,6$ см.

Положение, в котором остановится система, определяется законом изменения полной механической энергии: изменение потенциальной энергии груза (кинетическая энергия в крайних положениях равна нулю) равно работе по отрыву ленты:

$$(m + M)g \cdot \Delta h = A = \sigma d \Delta L.$$

Отсюда

$$M = \frac{\sigma d \Delta L}{g \Delta h} - m \approx 0,032 \text{ кг} = 32 \text{ г.}$$

Ответ: $M \approx 32$ г.

Ускорения грузов в начальный и конечный моменты времени находятся из второго закона Ньютона:

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - T(\alpha_1)$$

или

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha_1}.$$

Искомые значения:

$$a_1 = g - \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_1)} \approx 3,2 \text{ м/с}^2,$$

и

$$a_2 = \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_2)} - g \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что после остановки ускорения грузов будут равны нулю.

Ответ: $a_1 \approx 3,2 \text{ м/с}^2$, $a_2 \approx 4,9 \text{ м/с}^2$.



Выразите T_r через T_0 и T_x .

Поскольку поршни лёгкие и могут перемещаться без трения, давление внутри и снаружи одинаковое (равно p_0). Объём газа под поршнем $V = \pi r^2 h$, где h — высота расположения поршня. Уравнение Менделеева-Клапейрона для газа внутри цилиндра $p_0 \pi r^2 h = \nu R T$. Для малых изменений высоты и температуры $p_0 \pi r^2 dh = \nu R dT$, где $dh = v dt$.

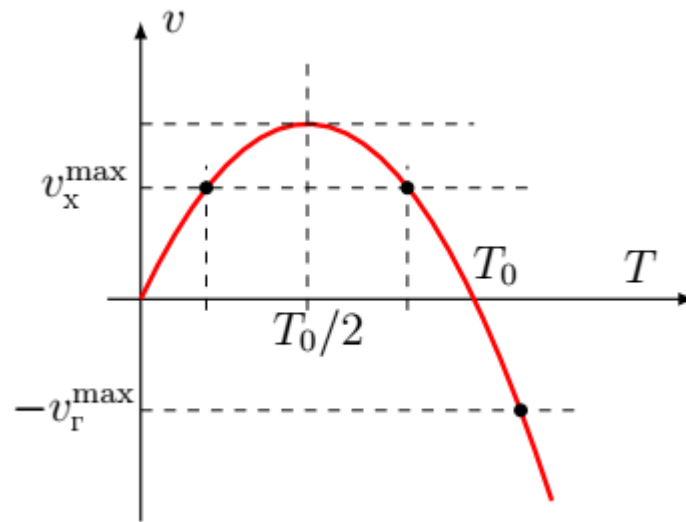
Изменение температуры газа происходит изобарически. Уравнение теплового баланса для малого промежутка времени $\alpha h 2 \pi r (T_0 - T) dt = \nu C_p dT$.

Из трёх записанных уравнений находим связь скорости и температуры:

$$v = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} \cdot T(T_0 - T).$$

Иначе $v(T) = aT(T_0 - T)$, где $a = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} = \text{const}$.

Графическое отображение полученной зависимости – парабола, пересекающая ось абсцисс в точках 0 и T_0 . Для горячего цилиндра максимальное значение скорости достигается в начальной точке движения при $T = T_r$ и равно по модулю $v_r^{\max} = aT_r(T_r - T_0)$.



Для холодного цилиндра максимальное значение скорости не определяется однозначно. При $T_x \geq T_0/2$ оно также достигается в начальной точке движения при $T = T_x$ и равно $v_x^{\max} = aT_x(T_0 - T_x)$. Если $T_x < T_0/2$, то максимум скорости соответствует значению $T = T_0/2$ (вершина параболы) и равен $v_x^{\max} = aT_0^2/4$.

Приравнивая выражения для скоростей $v_r^{\max} = v_x^{\max}$, находим искомое.

При $T_x \geq T_0/2$ получим $T_r(T_r - T_0) = T_x(T_0 - T_x)$. Решаем квадратное уравнение (относительно T_r): $T_r^2 - T_r T_0 - T_x(T_0 - T_x) = 0$, оставляем только положительный корень. Итак:

$$T_r = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_x(T_0 - T_x)}}{2}.$$

При $T_x < T_0/2$ получим $T_r(T_r - T_0) = T_0^2/4$. Решаем квадратное уравнение (относительно T_r): $T_r^2 - T_r T_0 - T_0^2/4 = 0$, оставляем только положительный корень. Итак:

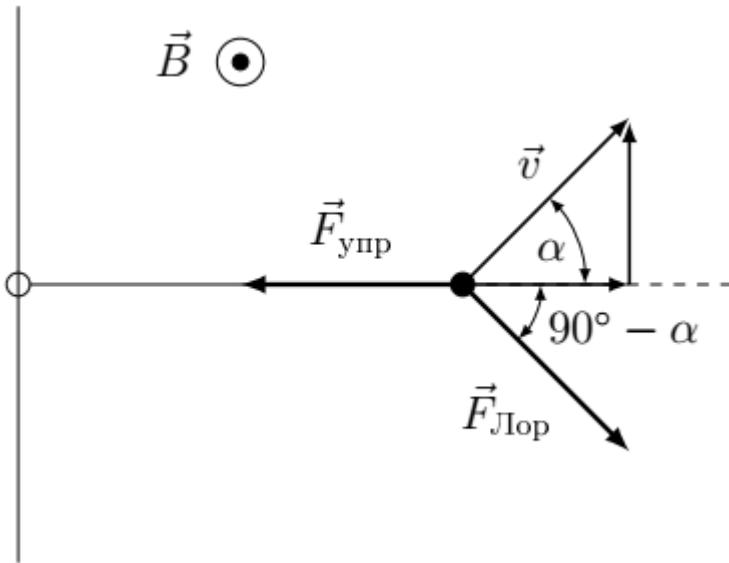
$$T_r = T_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:

$$T_r = \begin{cases} T_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, & \text{если } T_x < T_0/2; \\ \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_x(T_0 - T_x)}}{2}, & \text{если } T_x \geq T_0/2. \end{cases}$$



1 ?? Определите траекторию заряда.



Пусть ось x горизонтальна и направлена от спицы, ось y направлена вверх вдоль спицы. Начало координат находится к точке начального положения заряда. Запишем проекции второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB \cos(90^\circ - \alpha) \\ m\ddot{y} = -qvB \sin(90^\circ - \alpha) \end{cases}$$

Преобразуем полученные уравнения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB \sin(\alpha), \\ m\ddot{y} = -qvB \cos(\alpha). \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x}. \end{cases}$$

Метод 1

Продифференцируем по времени первое уравнение системы. Тогда

$$\begin{aligned} m\ddot{\dot{x}} &= -k\dot{x} + qB\ddot{y}, \\ \ddot{x} + \left[\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \right] \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим $\beta^2 = \frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2$:

$$\ddot{x} + \beta^2 \dot{x} = 0.$$

Откуда

$$\dot{x}(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t).$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0, \\ \ddot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\beta t), \\ x(t) = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta t), \\ \dot{y}(t) = \frac{-qBv_0}{m\beta} \sin(\beta t), \\ y(t) = \frac{qBv_0}{m\beta^2} (\cos(\beta t) - 1). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}}\right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0, y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2}\right),$$

большой полуосью

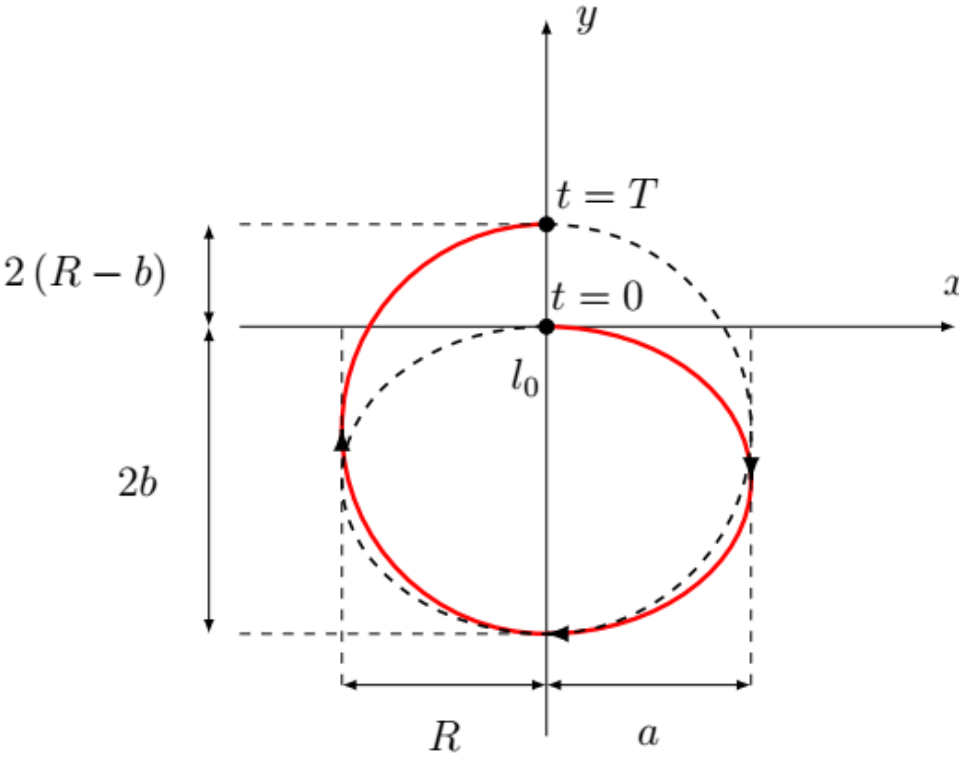
$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = \frac{mv_0}{qB}$ и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по дуге окружности радиуса $R = \frac{mv_0}{qB}$.



Метод 2

Из $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y = -\frac{qB}{m}dx = -\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y = 0, x = 0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y = -\Omega x.$$

Сила Лоренца не совершает работы, и, согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Откуда:

$$v_x^2 = v_0^2 - (\Omega^2 + \frac{k}{m})x^2 = v_0^2 - \beta^2 x^2,$$

где $\beta^2 = \Omega^2 + \frac{k}{m}$.

Выразим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\Omega x}{\sqrt{v_0^2 - \beta^2 x^2}}.$$

Откуда:

$$dy = -\frac{\Omega}{\beta} \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \gamma d(\sqrt{a^2 - x^2}),$$

где $a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}}$ и $\gamma = \frac{\Omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}}} < 1$.

Суммируя малые изменения этих величин, получим:

$$y - 0 = \gamma(\sqrt{a^2 - x^2} - a)$$

Откуда:

$$\left(\frac{y + \gamma a}{\gamma a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение эллипса. Координаты центра эллипса $(0, -\gamma a)$, его большая полуось равна $a = \frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}} = R\gamma$, а малая $b = \gamma a = \frac{qBmv_0}{km+(qB)^2} = R\gamma^2$.

Это уравнение описывает траекторию вплоть до возвращения длины резинки к исходной. Далее заряд попадает в область, где резинка провисает, и он движется по окружности радиуса $R = \frac{v_0}{\Omega} = \frac{mv_0}{qB}$ до возвращения длины резинки к исходной, после чего резинка натягивается и движение повторяется.

Метод 3

Из второго уравнения системы $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y = -\frac{qB}{m}dx = -\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y = 0, x = 0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y = -\Omega x.$$

Подставим это в первое уравнение системы:

$$m\ddot{x} = -kx - qB\Omega x.$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m} + \Omega^2\right)x$$

Обозначим $\beta^2 = \Omega^2 + \frac{k}{m}$.

$$x = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\beta}. \end{cases}$$

$$x = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta t)$$

Подставим в выражение для v_y :

$$\dot{y} = -\Omega x = -\frac{\Omega v_0}{\beta} \sin(\beta t).$$

Интегрируя, получаем:

$$y = \frac{\Omega v_0}{\beta^2} (\cos(\beta t) - 1).$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}}\right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0, y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2}\right),$$

большой полуосью

$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = \frac{mv_0}{qB}$ и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по окружности радиуса $R = \frac{mv_0}{qB}$.

Ответ: При положительном удлинении шнура $\Delta x > 0$ траектория является частью эллипса с большой и малой полуосями: $a = \frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}, b = \frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}$.

При ненатянutom шнуре $\Delta x = 0$ траектория является частью окружности с радиусом $R = \frac{mv_0}{qB}$.

В целом траектория состоит из последовательно чередующихся половинок эллипса и окружности, которые без излома и без разрыва переходят друг в друга при $x = 0$.

2 ?? Определите дрейфовую скорость заряда.

Определим период движения заряда:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2}} + \frac{\pi}{\frac{qB}{m}} = \frac{\pi m}{qB} \left(\frac{qB}{\sqrt{km + (qB)^2}} + 1 \right).$$

Ответ: Тогда дрейфовая скорость

$$u = \frac{2(R - b)}{T} = \frac{2kmv_0}{\pi\sqrt{km + (qB)^2} \left(qB + \sqrt{km + (qB)^2} \right)}.$$

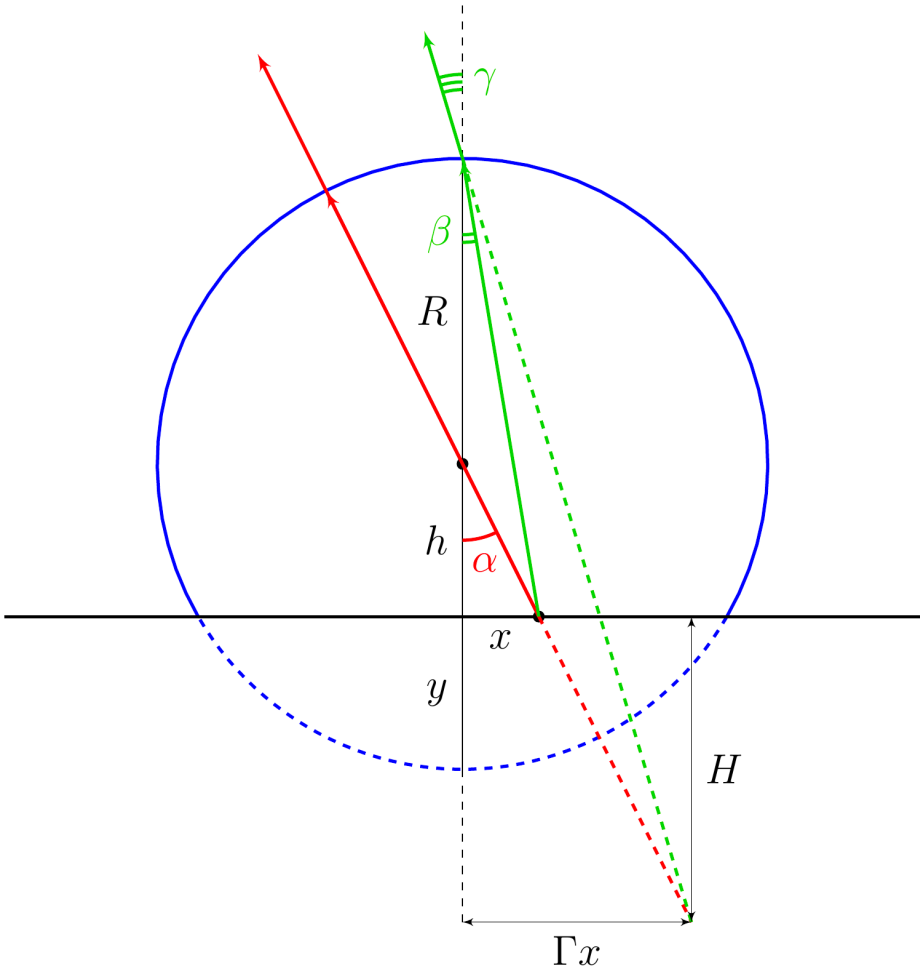
 Website in English



1 ?? Определите показатель преломления стекла n .

Заметим, что по условию фотографирование происходит с большого расстояния, поэтому можно считать, что увеличение цилиндра в направлении его оси отсутствует. Дополнительно можно убедиться в этом, проверив, что точки пересечения линий миллиметровки и их изображений лежат примерно на оси цилиндра.

Теперь исследуем увеличение для параксиальных лучей в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Пусть расстояние от оси цилиндра до плоскости равно h . Будем считать его положительным, если осталось больше половины цилиндра. Рассмотрим точку, смещённую от плоскости симметрии системы на малое расстояние x . Найдём положение её изображения, образованного параксиальными лучами.



Из закона преломления света получаем:

$$\gamma = n\beta = \frac{nx}{h + R}.$$

Запишем геометрические соотношения.

$$\frac{x(h + H)}{h} = \Gamma x = \frac{nx(h + H + R)}{h + R}$$

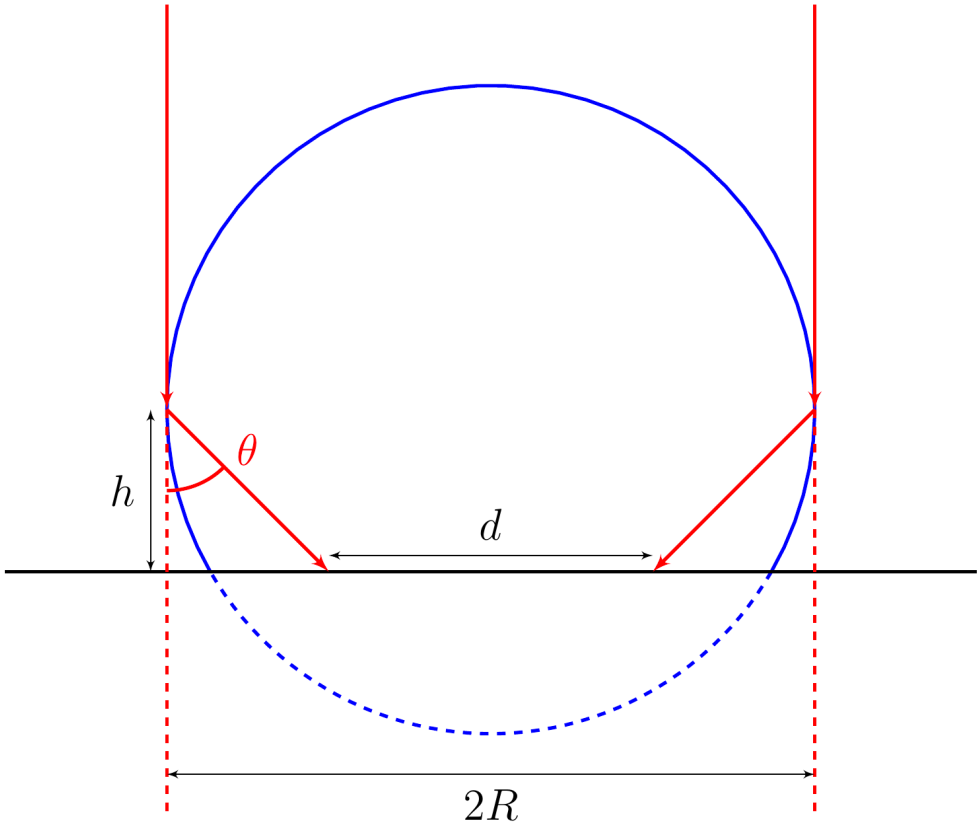
Выразим и подставим значение H .

$$\begin{aligned} H &= h(\Gamma - 1) \\ \Gamma(h + R) &= n(\Gamma h + R) \end{aligned}$$

Получаем искомое увеличение:

$$\Gamma = \frac{nR}{R - (n - 1)h}$$

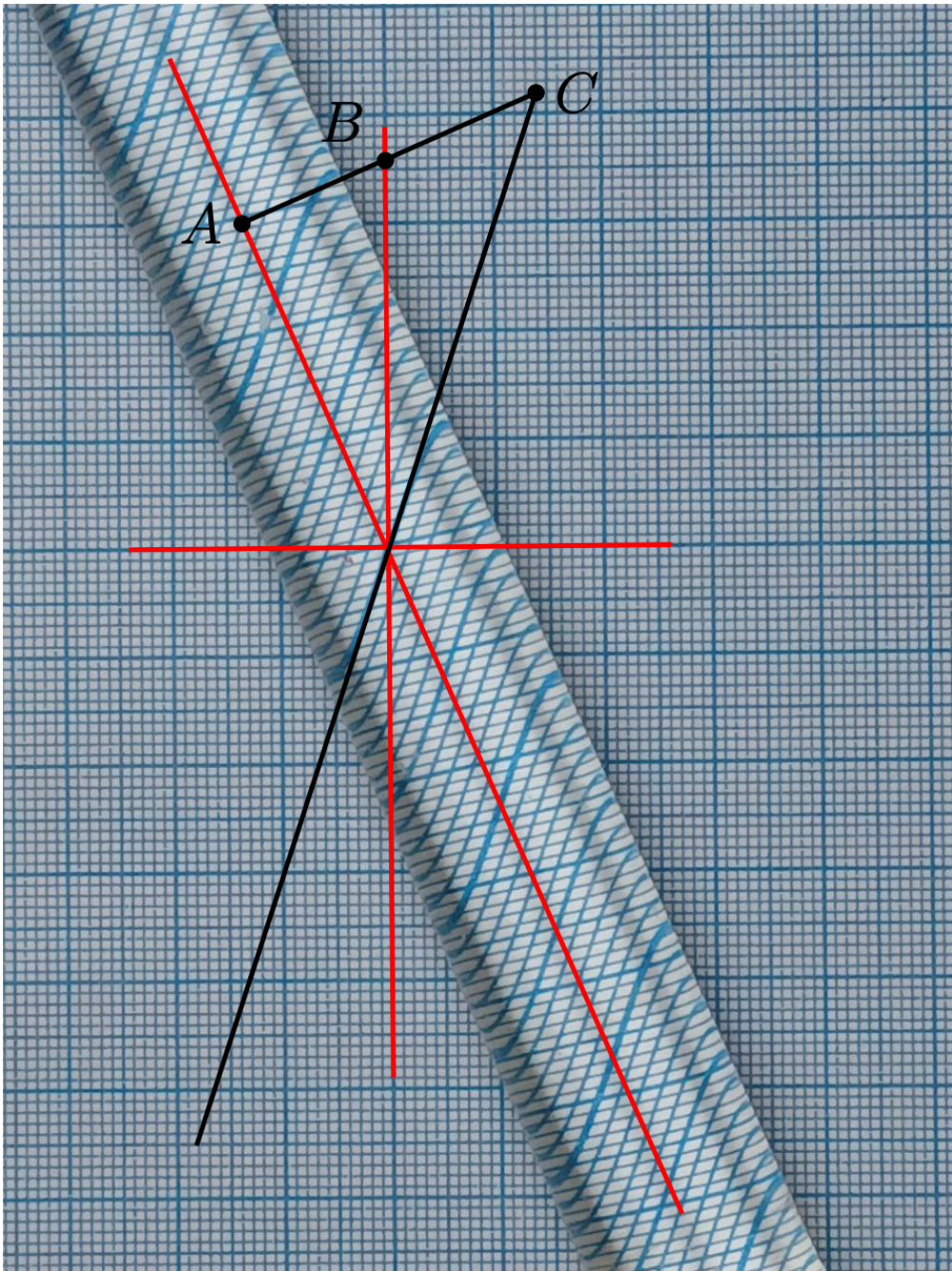
Заметим, что мы видим не всю миллиметровку, которую закрывает цилиндр. Такое может быть только в случае $h > 0$, то есть отрезали меньше половины цилиндра. По фотографии видно, что область видимости ограничивают лучи, идущие по касательной к цилиндру.



Из закона преломления света имеем:

$$\cos \theta = \frac{1}{n},$$
$$d = 2 \left(R - h \operatorname{tg} \theta \right)$$
$$\frac{d}{2R} = 1 - \frac{h \sqrt{n^2 - 1}}{R}$$

Теперь достаточно измерить по фотографии Γ и d/R . Тогда у нас будет система из двух уравнений с двумя неизвестными.



Проведём ось цилиндра, вертикальную линию миллиметровки и касательную к её изображению в точке на оси цилиндра. Отрезок CA – перпендикуляр из точки касательной на ось цилиндра. Тогда увеличение можно найти по фотографии:

$$\Gamma = \frac{AC}{AB} \approx 2,0.$$

Для поиска области видимости можем воспользоваться подобием: для любой прямой можем определить, какую её часть видно через цилиндр. Воспользуемся горизонтальной линией на миллиметровке: закрыто цилиндром 22 мм, видно через цилиндр 9 мм.

$$\frac{d}{2R} \approx 0,41$$

Для удобства введём обозначение $\xi = h/R$.

$$\begin{cases} 2 = \frac{n}{1 - (n - 1)\xi}; \\ 0,41 = 1 - \xi\sqrt{n^2 - 1}. \end{cases}$$

$$\xi = \frac{0,59}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2 - n}{2(n - 1)}.$$

Получили уравнение на n , которое можно решить численно: $n = 1,48$.

Ответ:

$n = 1,48$

2 ?? Какая часть радиуса цилиндра отсечена плоскостью?

Подставляя полученное значение в формулы для ξ , получаем:

$$\xi = 0,54.$$

При этом искомая величина выражается через ξ :

$$\frac{y}{R} = \frac{R - h}{R} = 1 - \xi = 0,46.$$

Ответ:

$\frac{y}{R} = 0,46$

 Website in English